Universität
Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik II

Herbstsemester 2019

Vorlesung 3

Prof. Dr. Katia Saporiti

Übersicht

I. Konversion, Obversion und Kontraposition

II. Venn-Diagramme zur Überprüfung der Gültigkeit von Schlüssen
   - Darstellung einzelner Aussagen
   - Schlüsse mit einer Prämisse
   - Schlüsse mit zwei Prämissen
   - Schlussformen (Schemata, Syllogismen)

Konversionsregeln in traditioneller und moderner Schreibweise

1. Allgemeine verneinende Aussagen konvertieren in allgemeine verneinende Aussagen. (*conversio simplex*): Wenn $\boldsymbol{A}$ keinem $\boldsymbol{B}$ zukommt, so kommt $\boldsymbol{B}$ nicht einem $\boldsymbol{A}$ zu.

$$SeP \Rightarrow PeS \qquad\qquad \forall x(Px \rightarrow \neg Qx) \Rightarrow \forall x(Qx \rightarrow \neg Px)$$

2. Allgemeine bejahende Aussagen konvertieren in partikulare bejahende Aussagen. (*conversio per accidens*): Wenn $\boldsymbol{A}$ jedem $\boldsymbol{B}$ zukommt, so kommt $\boldsymbol{B}$ einigen $\boldsymbol{A}$ zu.

$$SaP \Rightarrow PiS \qquad\qquad \cancel{\forall x(Px \rightarrow Qx) \Rightarrow \exists x(Qx \wedge Px)}$$

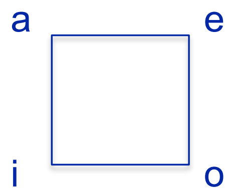
3. Partikulare bejahende Aussagen konvertieren in partikulare bejahende Aussagen. (*conversio simplex*): Wenn $\boldsymbol{A}$ einigen $\boldsymbol{B}$ zukommt, so kommt $\boldsymbol{B}$ einigen $\boldsymbol{A}$ zu.

$$SiP \Rightarrow PiS \qquad\qquad \exists x(Px \wedge Qx) \Rightarrow \exists x(Qx \wedge Px)$$

4. Partikulare verneinende Aussagen konvertieren nicht.

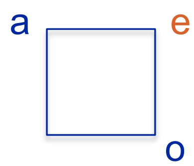
Obversionen

- In der *Obversion* eines Urteils
  - ändert sich die Qualität des Urteils (von bejahend zu verneinend und umgekehrt)
  - und wird der Prädikatbegriff durch sein Komplement ersetzt (z.B. *Tier* durch *Nicht-Tier*).
- Die Obversion ist für alle kategorischen Urteile gültig.
- Ein Urteil und seine Obversion sind logisch äquivalent.



	Urteil	**Obversion**
a	Alle Hunde sind Tiere. (SaP)	Kein Hund ist ein Nicht-Tier.
e	Keine Pflanze ist ein Tier. (SeP)	Alle Pflanzen sind Nicht-Tiere.
i	Einige Tiere sind Hunde. (SiP)	Einige Tiere sind keine Nicht-Hunde.
o	Einige Tiere sind keine Hunde. (SoP)	Einige Tiere sind Nicht-Hunde.

Kontrapositionen



– In der Kontraposition eines Urteils wird
  – der Subjektbegriff durch das Komplement des Prädikatbegriffs und
  – der Prädikatbegriff durch das Komplement des Subjektbegriffs ersetzt.
– Die Kontraposition ist in der modernen Logik für allgemein bejahende (a) und für partikulär verneinende (o) Urteile gültig.
– Die traditionelle Logik kennt zusätzlich die *Kontraposition durch Beschränkung* und erlaubt den Übergang von „Kein S ist P" zu „Einige Nicht-P sind keine Nicht-S".

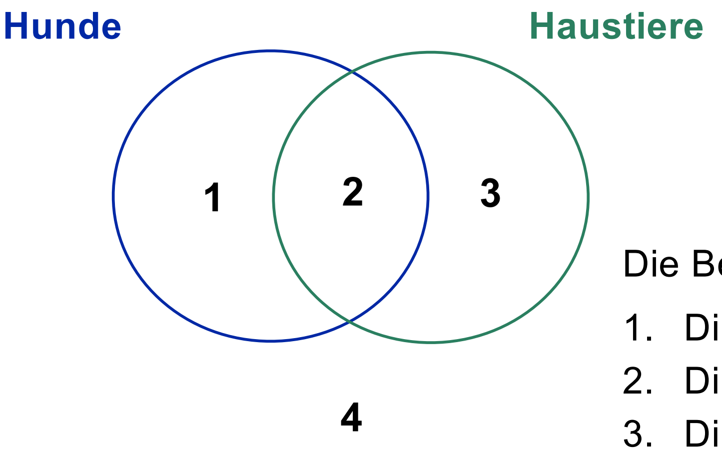
	Urteil	**Kontraposition**
a	Alle Hunde sind Tiere. (SaP)	Alle Nicht-Tiere sind Nicht-Hunde.
e	Keine Pflanze ist ein Tier. (SeP)	~~Kein Nicht-Tier ist eine Nicht-Pflanze.~~ *Einige Nicht-Tiere sind keine Nicht-Pflanzen.*
i	Einige Tiere sind Hunde. (SiP)	~~Einige Nicht-Hunde sind Nicht-Tiere.~~
o	Einige Tiere sind keine Hunde. (SoP)	Einige Nicht-Hunde sind keine Nicht-Tiere.

Venn-Diagramme

Eine Methode zur Überprüfung logischer Schlüsse mit Hilfe von Diagrammen geht auf den englischen Mathematiker und Logiker John Venn (1834-1926) zurück.

So genannte ***Venn-Diagramme*** bestehen aus einander überlappenden Kreisen.

Jeder Kreis steht für eine Klasse von Dingen (z.B. Hunde und Haustiere).

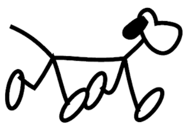


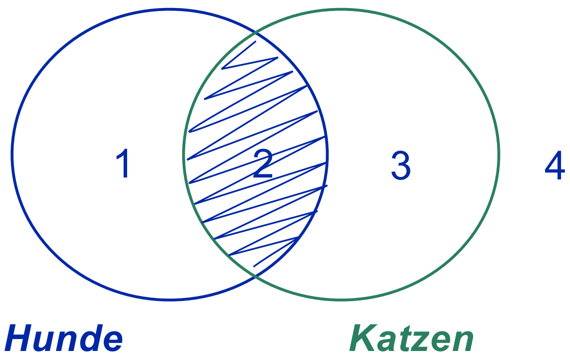
Die Bereiche 1– 4 „enthalten" jeweils:

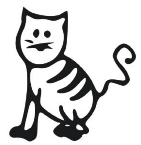
1. Dinge, die Hunde, aber keine Haustiere sind.
2. Dinge, die Hunde und Haustiere sind.
3. Dinge, die Haustiere, aber keine Hunde sind.
4. Dinge, die weder Hunde noch Haustiere sind.

Venn-Diagramme zur Darstellung von Urteilen (Aussagen)

- Im Venn-Diagramm wird jeweils angegeben, ob ein Bereich leer bzw. nicht leer ist (mindestens ein Einzelding enthält).
- Leere Bereiche werden schraffiert.
- Nicht leere Bereiche werden mit einem ✗ markiert.
- Über Bereiche, die weder schraffiert noch mit einem ✗ markiert sind, sagt das Diagramm nichts aus. (!)
- Ein universales negierendes Urteil wie „Kein Hund ist eine Katze“ wird also wie folgt dargestellt.





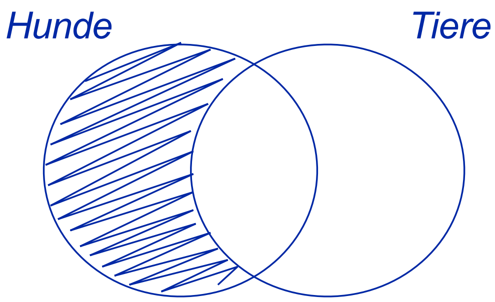


- Bereich 2 ist leer: Es gibt nichts, das zugleich ein Hund und eine Katze ist. (Hunde sind keine Katzen. Wenn etwas ein Hund ist, ist es keine Katze. Was ein Hund ist, ist keine Katze ...)

Venn-Diagramme

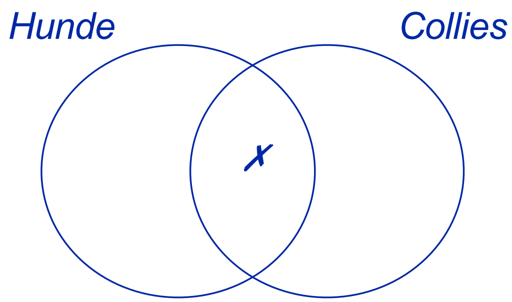
(1) Alle Hunde sind Tiere.

– Bereich 1 ist leer. Es gibt nichts, das ein Hund, aber kein Tier ist.



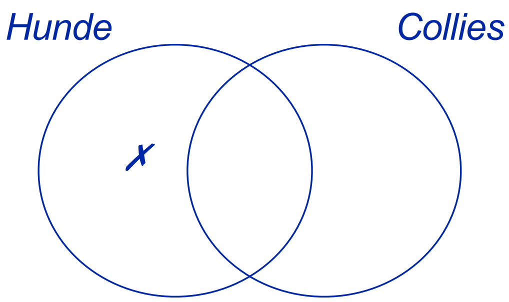
(2) Einige Hunde sind Collies.

– Bereich 2 ist nicht leer. Es gibt mindestens ein Ding, das ein Hund und zugleich ein Collie ist.

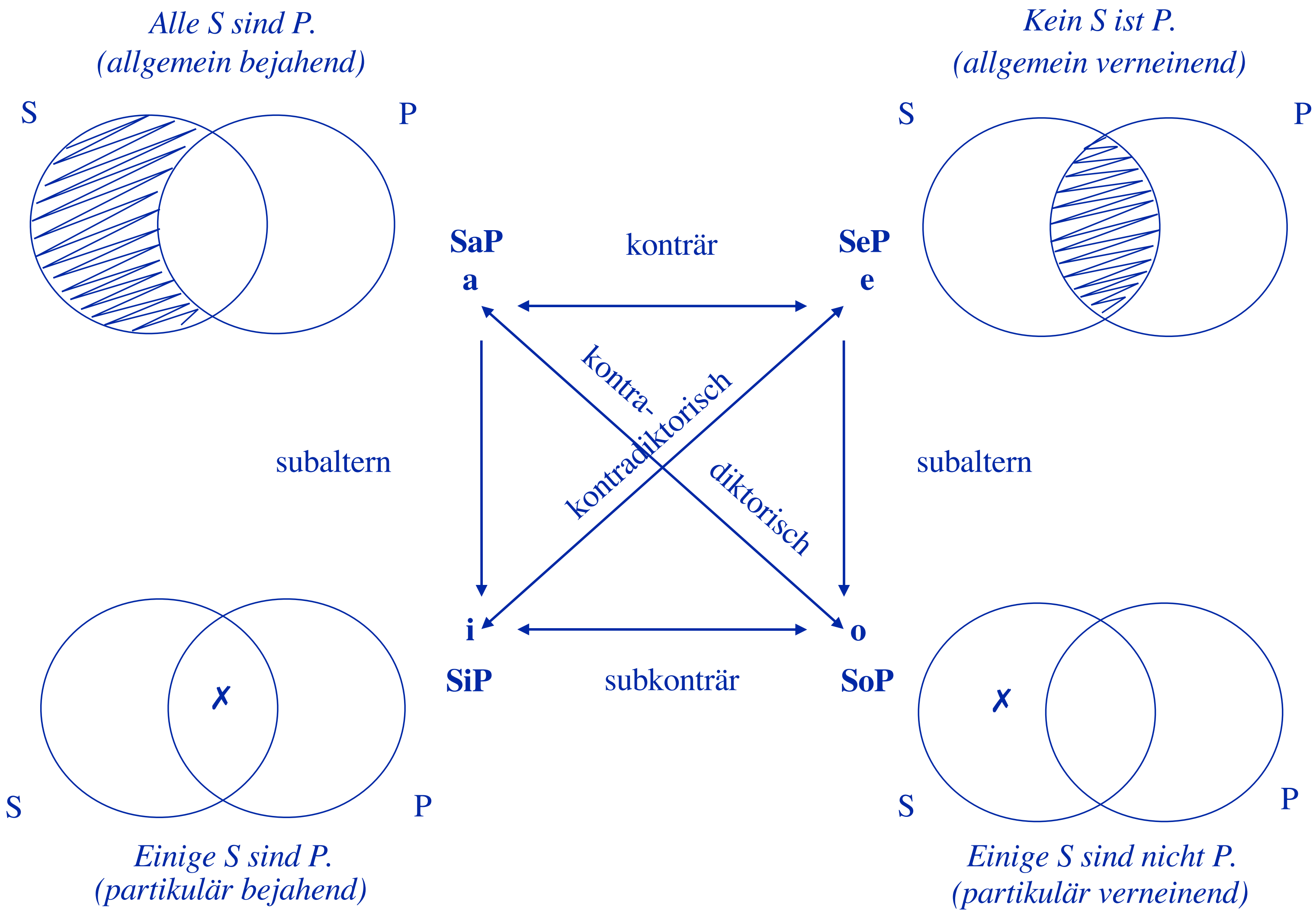


(3) Einige Hunde sind keine Collies.

– Bereich 1 ist nicht leer. Es gibt mindestens ein Ding, das ein Hund, aber kein Collie ist.



Das logische Quadrat

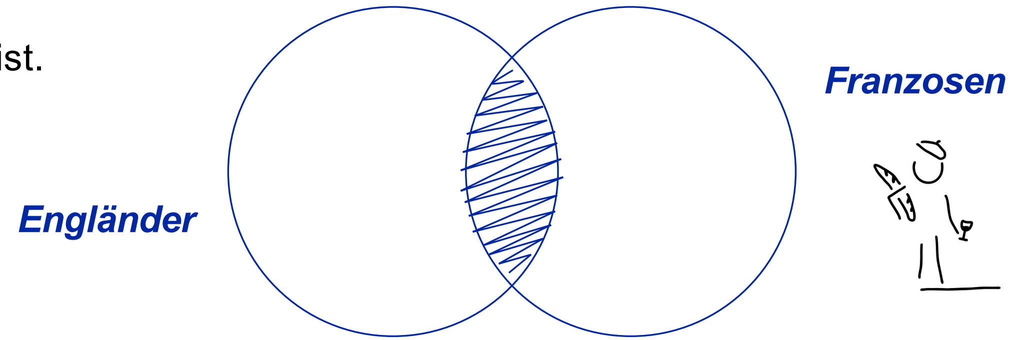


Schlüsse mit einer Prämisse

Überprüfung von Schlüssen mit einer Prämisse mit Hilfe von Venn-Diagrammen:

1. Schritt: Prämisse im Diagramm darstellen
   a. Zwei überlappende Kreise zeichnen und beschriften
   b. Prämisse eintragen
2. Schritt: Ablesen, ob die Konklusion dargestellt ist.

   WICHTIG: Am Diagramm nichts mehr ändern!



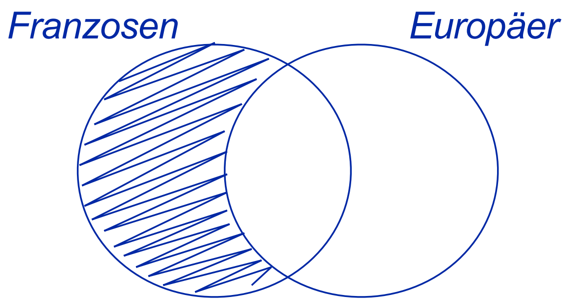
Beispiel:

Kein Engländer ist ein Franzose.
Also ist kein Franzose ein Engländer.

Bereich 2, in dem sich die Dinge finden, die zugleich Franzosen und Engländer sind, ist leer.
Damit ist die Wahrheit der Konklusion garantiert.
Der Schluss ist gültig.

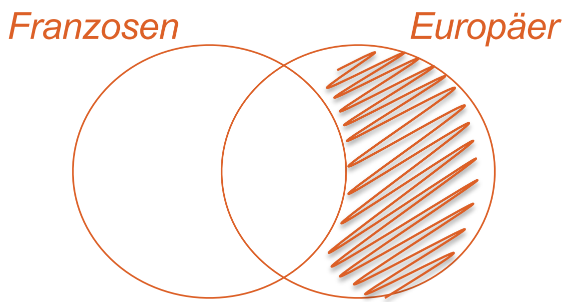
(Konversion eines universal verneinenden Urteils)

(2) Alle Franzosen sind Europäer.
Also sind alle Europäer Franzosen.



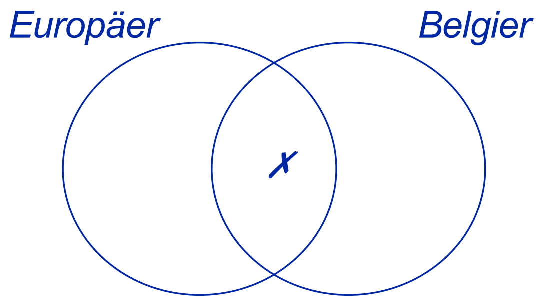
Das Diagramm enthält keine Information über den Bereich 3 (der schattiert sein müsste, um die Wahrheit der Konklusion wiederzugeben).

Mitunter hilft es, ein zusätzliches Diagramm für die **Konklusion** zu zeichnen, um zu prüfen, ob die relevante Information im Diagramm der Prämisse enthalten ist.



Der Schluss ist nicht gültig.

(3) Einige Europäer sind Belgier.
Also sind einige Belgier Europäer.

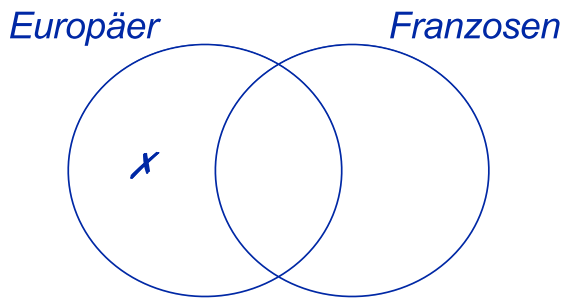


Bereich 2 ist nicht leer. Es gibt mindestens einen Belgier, der zugleich ein Europäer ist. Der Schluss ist gültig.

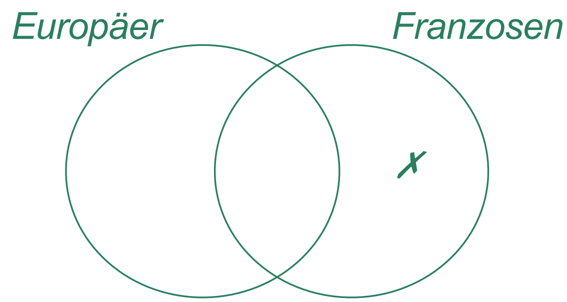
(Konversion eines partikular bejahenden Urteils) zusätzliche Folien

(4) Einige Europäer sind keine Franzosen.
Also sind einige Franzosen keine Europäer.

Das Diagramm enthält keine Information über den Bereich 3 (der nicht leer sein dürfte, also ein x enthalten müsste, um die Wahrheit der Konklusion anzuzeigen). Der Schluss ist nicht gültig.



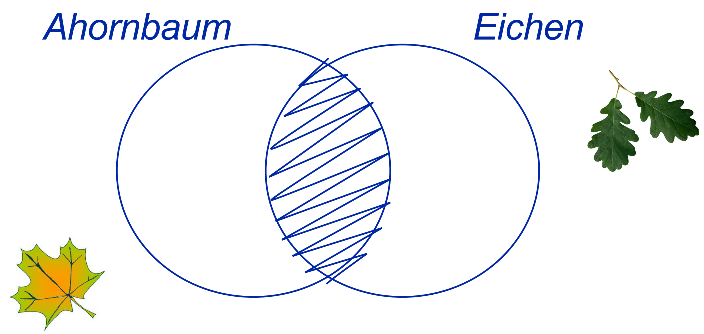
Ein zusätzliches Diagramm für die Konklusion ... (Vorsicht: dies ist nicht Teil des eigentlichen Prüfverfahrens)



(5) Kein Ahornbaum ist eine Eiche.
Also sind alle Ahornbäume Nicht-Eichen.

Bereich 2 ist leer. Es gibt nichts, das ein Ahornbaum ist und zugleich eine Eiche (bzw. keine Nicht-Eiche). Der Schluss ist gültig.

(Obversion eines universell negierenden Urteils.)

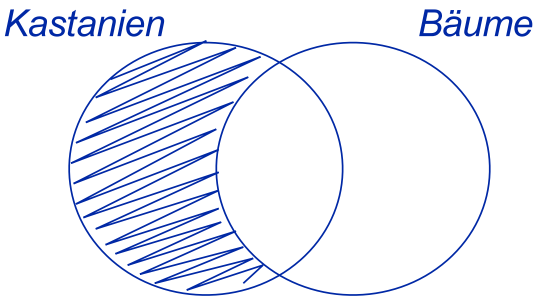


(6) Alle Kastanien sind Bäume.
Also sind alle Nicht-Bäume Nicht-Kastanien.

(Also sind alle Dinge, die keine Bäume sind, Dinge, die keine Kastanien sind. / Also sind Dinge, die keine Bäume sind, auch keine Kastanien.)

Das Diagramm enthält die Information: Wenn etwas außerhalb des Kreises für Bäume liegt, liegt es auch außerhalb des Kreises für Kastanien. Der Schluss ist gültig.

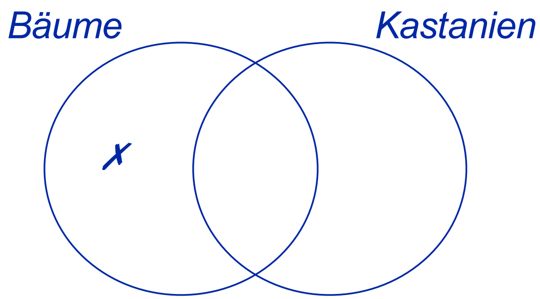
(Kontraposition eines universell affirmierenden Urteils.)



(7) Einige Bäume sind Nicht-Kastanien.
Also sind einige Kastanien Nicht-Bäume.

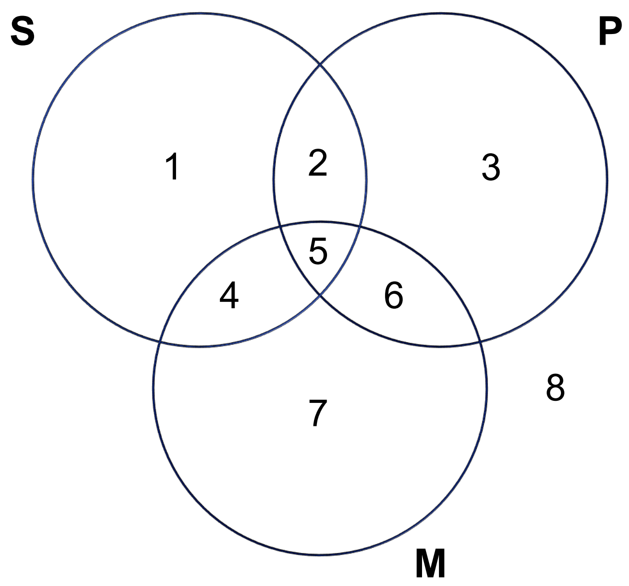
(Einige Bäume sind keine Kastanien. Also sind einige Kastanien keine Bäume.)

Der Schluss ist nicht gültig, denn im Bereich 3, der Kastanien beherbergt, die keine Bäume sind, findet sich kein Kreuz.



Schlüsse mit zwei Prämissen

- Zum Überprüfen der Gültigkeit von Syllogismen zeichnet man drei Kreise,
  - von denen der linke obere den Subjekt- oder Unterbegriff (S),
  - der rechte obere den Prädikat- oder Oberbegriff (P) und
  - der untere den Mittelbegriff (M) repräsentiert.

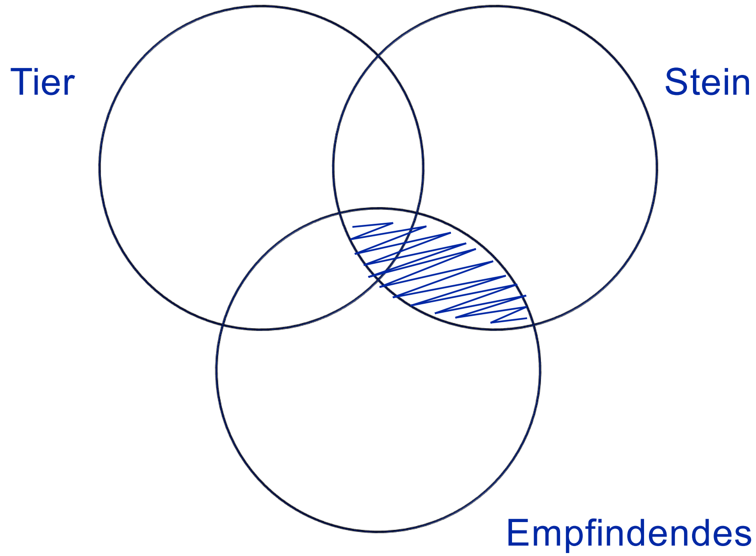


- ✗ in Bereich 5 bedeutet: Mindestens ein Ding gehört allen drei Klassen an (ist Element jeder der drei Mengen, fällt unter jeden der drei Begriffe).
- Schraffur in Bereich 5 bedeutet: Kein Ding gehört allen drei Klassen an.
- ✗ in Bereich 8 bedeutet: Mindestens ein Ding gehört keiner der drei Klassen an.
- Schraffur in den Bereichen 4 & 5 bedeutet: Kein Ding fällt sowohl unter den Subjekt- als auch unter den Mittelbegriff.

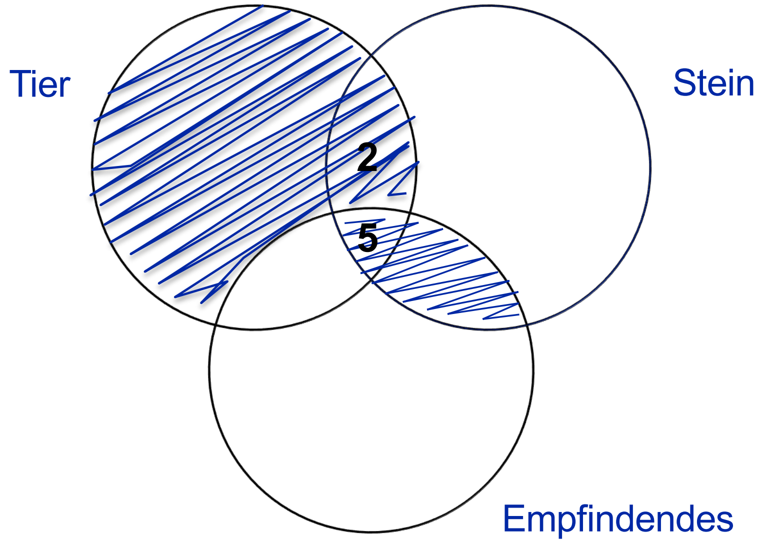
Um die Gültigkeit eines Syllogismus zu überprüfen, trägt man nacheinander die beiden Prämissen ein und prüft anschliessend, ob die Wahrheit der Konklusion durch das so entstandene Diagramm angezeigt wird.

Beispiel (1): *(P1) Kein Stein ist ein empfindendes Wesen.*
(P2) Alle Tiere sind empfindende Wesen.
(K) Also ist kein Tier ein Stein.

Prämisse 1



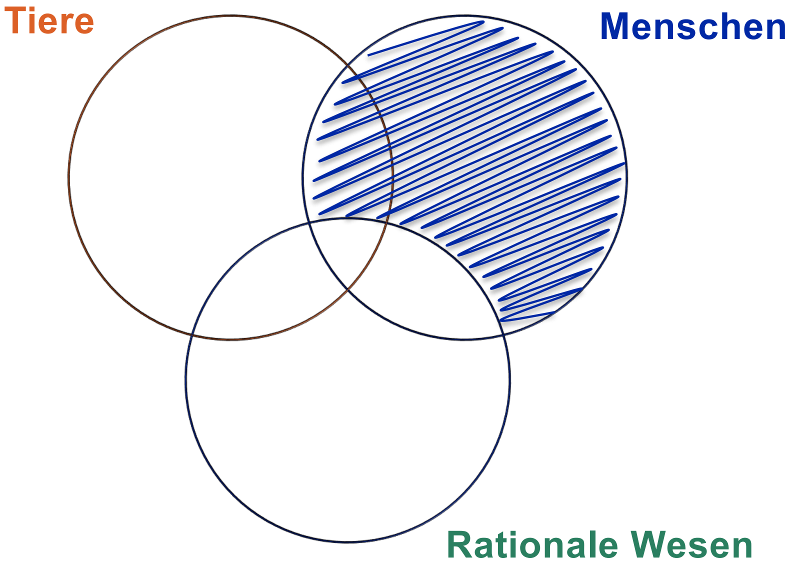
Prämisse 1 & 2



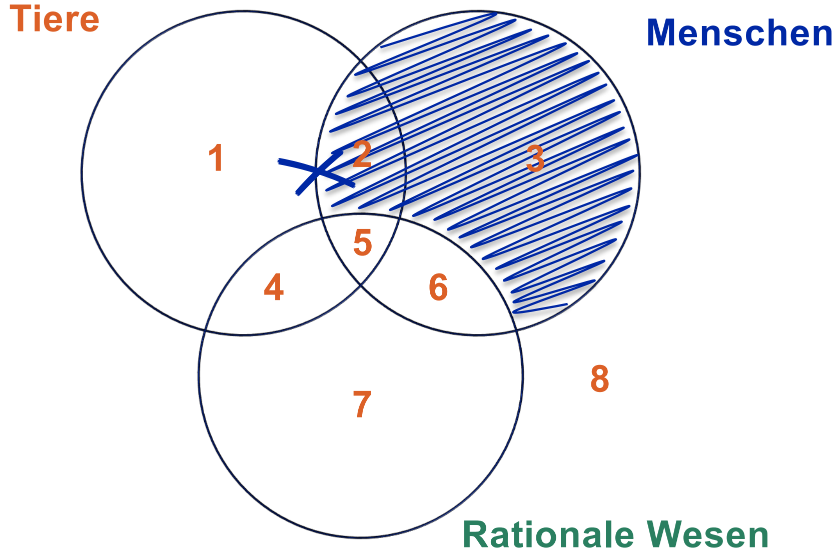
Schritt 3 (Auswertung): (1) ist gültig, denn die Bereiche 2 & 5 sind schraffiert (also leer). Nach Schritt 2 zeigt das Diagramm: Es gibt kein Tier, das zugleich ein Stein wäre.

(2) Alle **Menschen** sind **rationale Wesen**.
Einige **Tiere** sind keine **rationalen Wesen**.
Also sind einige **Tiere** keine **Menschen**.

Prämisse 1

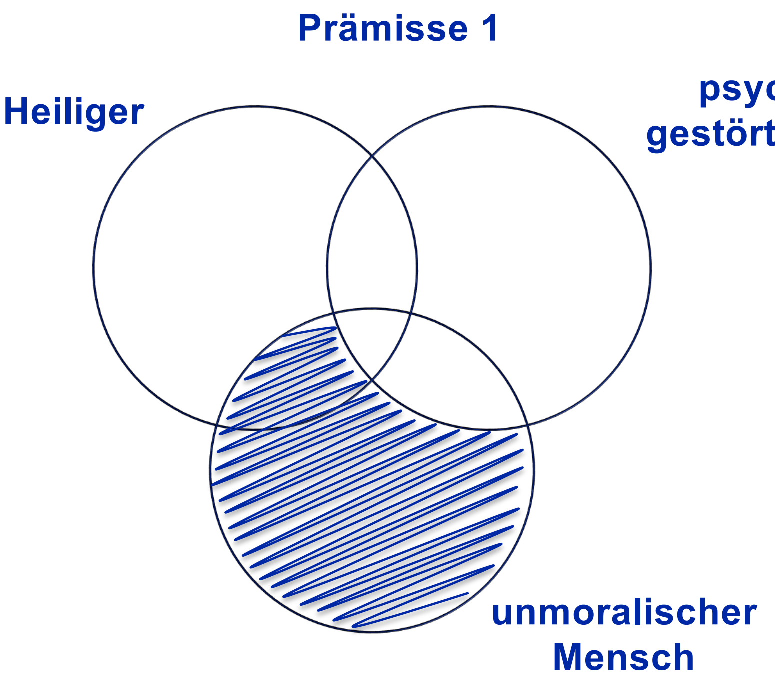


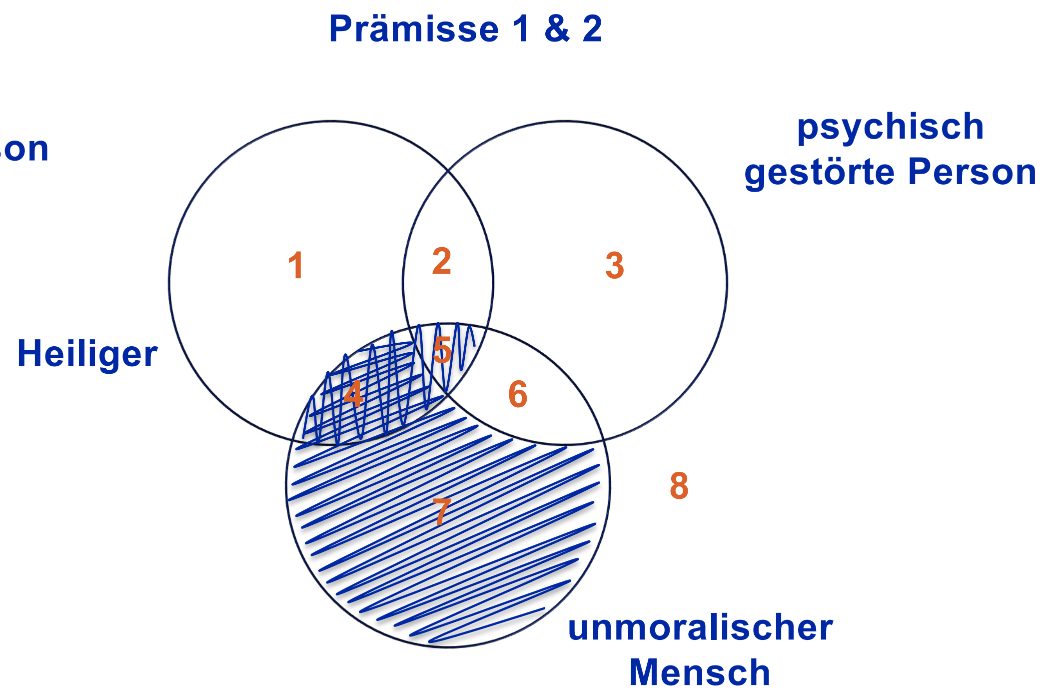
Prämisse 1 & 2



Schritt 3 (Auswertung): (2) ist gültig. Das Diagramm zeigt, dass der Bereich 2 leer ist und dass die Bereiche 1 und 2 nicht beide leer sein können. Es gibt also etwas, das in der Klasse der Tiere, aber außerhalb der Klasse der Menschen liegt.

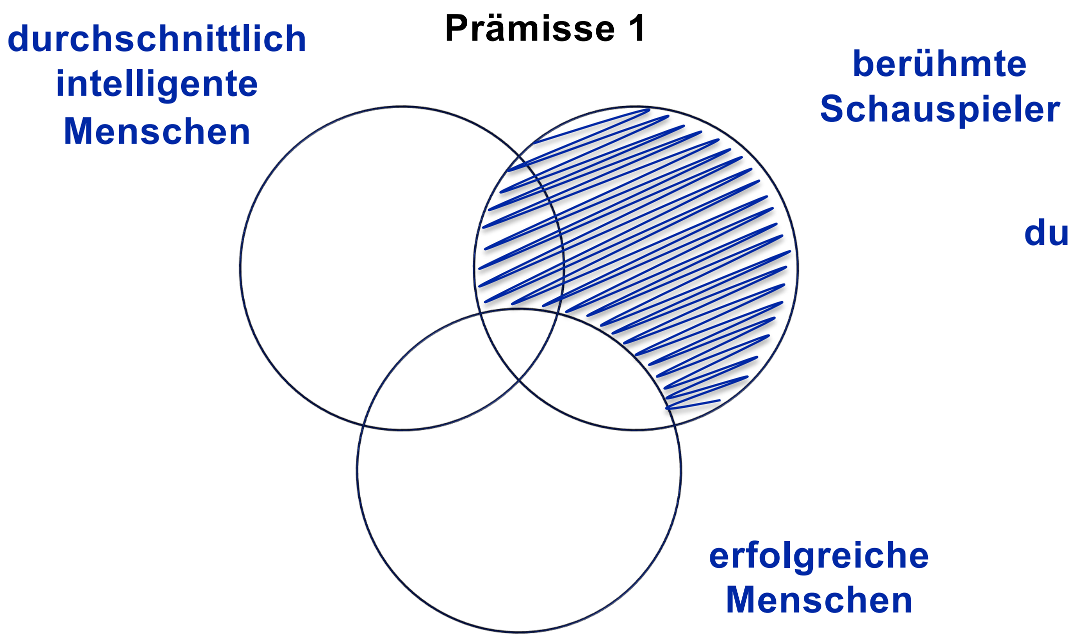
(3) Alle unmoralischen Menschen sind psychisch gestörte Personen.
Kein Heiliger ist ein unmoralischer Mensch.
Also ist kein Heiliger eine psychisch gestörte Person.

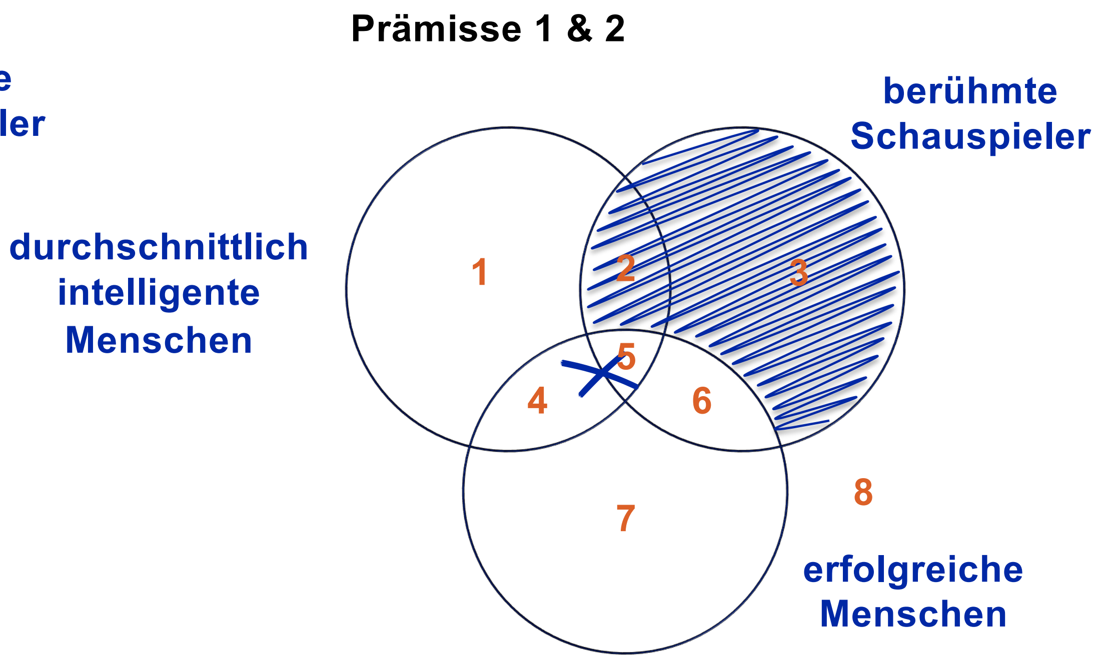




Schritt 3 (Auswertung): (3) ist nicht gültig. Denn Bereich 2 ist nicht schraffiert. Das Diagramm sagt über Bereich 2 nichts aus und lässt die Möglichkeit offen, dass Bereich 2 nicht leer ist. Es könnte also einen Heiligen geben, der eine psychisch gestörte Person ist.

(4) Alle berühmten Schauspieler sind erfolgreiche Menschen.
<u>Einige erfolgreiche Menschen sind Menschen durchschnittlicher Intelligenz</u>.
Einige Menschen durchschnittlicher Intelligenz sind berühmte Schauspieler.

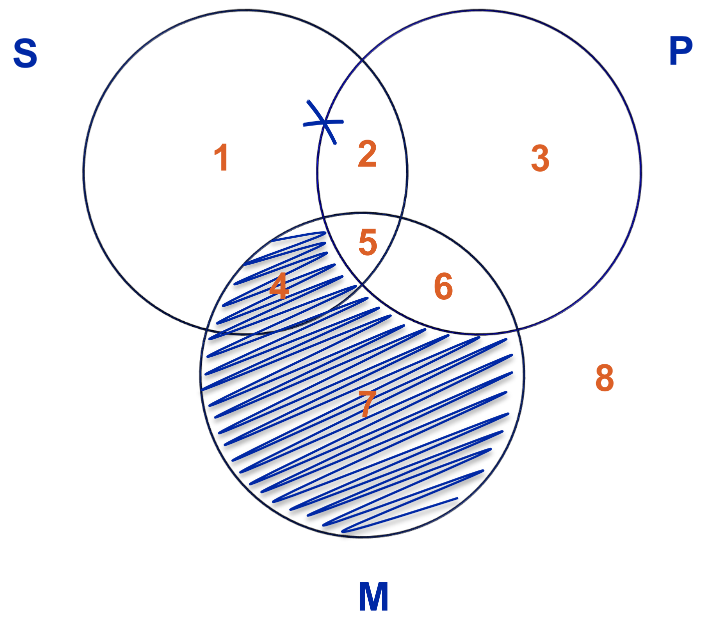




Schritt 3 (Auswertung): (4) ist ungültig. Das Diagramm garantiert nicht, dass sich in Bereich 2 oder 5 ein Individuum befindet. Bereich 2 ist schraffiert und damit leer. Und das Diagramm lässt die Möglichkeit offen, dass auch Bereich 5 leer ist. Das Kreuz auf der Trennlinie zwischen Bereich 4 und 5 garantiert nur, dass nicht beide leer sind.

Schlussformen

Alle M sind P. MaP
Einige S sind nicht M. SoM
Also sind einige S nicht P. SoP



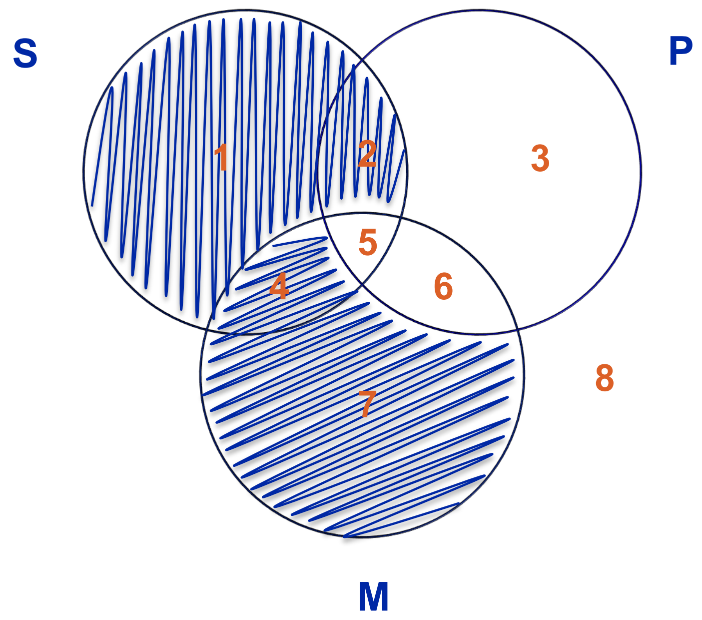
Mit Hilfe der Venn-Diagramme lassen sich auch Schlussformen (Modi) auf ihre Gültigkeit hin überprüfen.

Schritt 1: Die Bereiche 4 und 7 werden schraffiert, weil sie laut der ersten Prämisse (dem Obersatz) leer sein müssen.

Schritt 2: Ein Kreuz wird auf der Trennlinie zwischen den Bereichen 1 und 2 eingetragen, weil laut der zweiten Prämisse (dem Untersatz) nicht beide leer sein können.

Schritt 3 (Auswertung): Es handelt sich nicht um eine gültige Schlussform. Das Diagramm lässt die Möglichkeit offen, dass die Bereiche 1 und 4 beide leer sind. Die Wahrheit der Konklusion lässt sich also nicht ablesen.

Alle M sind P. MaP
Alle S sind M. SaM
Also sind alle S P. SaP



Denn wenn A von jedem B und B von jedem C [ausgesagt wird], muss A von jedem C ausgesagt werden. (An. pr. I. 4. 25b 37)

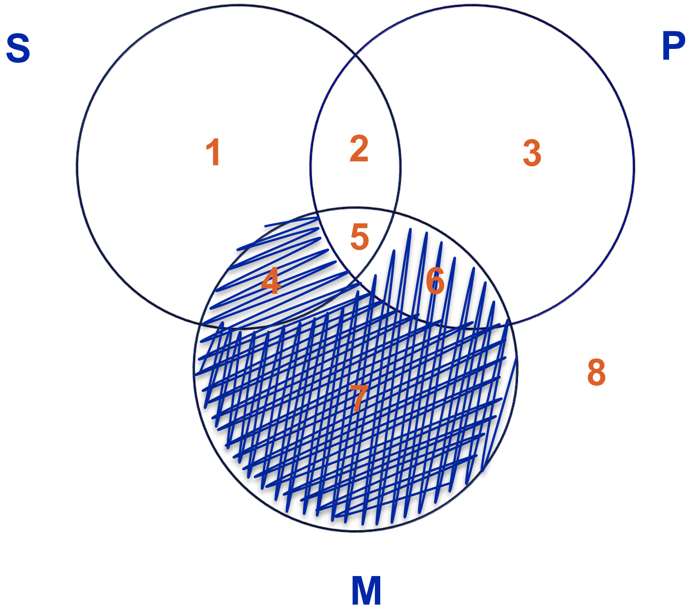
Schritt 1: Die Bereiche 4 und 7 werden schraffiert, weil sie laut der ersten Prämisse (dem Obersatz) leer sein müssen.

Schritt 2: Die Bereiche 1 und 2 werden schraffiert, weil sie laut der zweiten Prämisse (dem Untersatz) leer sein müssen.

Schritt 3 (Auswertung): Schlüsse dieser Form sind gültig. Der einzige Bereich von S, der nicht schraffiert (und damit leer) ist, ist zugleich ein Bereich von P. Es kann also kein S geben, das nicht auch P wäre.

Es handelt sich um den Modus *Barbara* der ersten Figur.

Alle M sind P. MaP
Alle M sind S. MaS
Also sind einige S P. SiP



Schritt 1: Die Bereiche 4 und 7 werden schraffiert, weil sie laut der ersten Prämisse (dem Obersatz) leer sein müssen.

Schritt 2: Die Bereiche 6 und 7 werden schraffiert, weil sie laut der zweiten Prämisse (dem Untersatz) leer sein müssen.

Schritt 3 (Auswertung): Ungültige Schlussform. In Bereich 2 und/oder 5 müsste ein Kreuz sein, wenn der Schluss gültig wäre.

Es handelt sich um den Modus *Darapti* der dritten Figur, der der modernen Logik zufolge ungültig, in der traditionellen Logik aber gültig ist.

Könnte das Verfahren erweitert werden, so dass mit ihm auch die Gültigkeit von Syllogismen gemäß der traditionellen Logik nachgewiesen werden könnte?

Berücksichtigte man bei der Auswertung des Diagramms den Umstand, dass kein Begriff leer sein darf, so ergäbe sich die Wahrheit der Konklusion daraus, dass M und damit der Bereich 5 nicht leer sein darf. Demnach sind einige S tatsächlich P und die Schlussform ist gemäß der traditionellen Logik gültig.

ABER ...

FIN